Práctica 4 (Grupos H)

1. Considere las funciones de producción

$$f_1(x,y) = x + 2y, \qquad f_2(x,y) = xy^{1/2}, \qquad f_3(x,y) = \left(x^{1/2} + y^{1/2}\right)^{1/2}$$

siendo x e y las cantidades empleadas de los factores de producción X e Y. Encuentre, si fuese posible, una función entre las anteriores para representar:
a) Un proceso de producción con productividades marginales positivas, tal que la cantidad adicional producida con una unidad adicional del factor X sea mayor cuanto menor sea la cantidad empleada del factor Y.
b) Un proceso de producción tal que la productividad marginal del factor Y sea creciente en x y la productividad marginal del factor X sea decreciente en y.
c) Un proceso de producción con productividades marginales positivas, tal que la productividad marginal del factor Y sea creciente en x y decreciente en y.

2. Considere la función

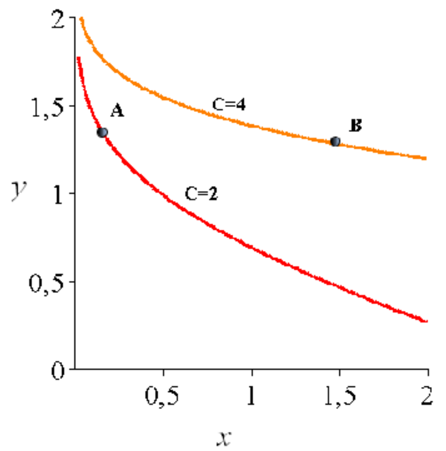
$$f(x,y) = \ln(x+1) + 2y$$

a) Dibuje la curva de nivel de valor 1 de f.
b) Calcule el gradiente de f en (x,y). Use la condición suficiente de diferenciabilidad para analizar si f es diferenciable en $(0,1)$.
c) Obtenga la diferencial de f en el punto $(0,1)$.
d) Obtenga la ecuación del plano tangente a la gráfica de f en el punto $(0,1,f(0,1))$
e) Diga, sin usar la calculadora, cuál es aproximadamente el valor de $f(0.1, 1.02)$

3. La función de beneficios de una empresa es $B(K,L) = 16K^{1/4}L^{1/4} - 4K - L$ donde K es la cantidad de capital y L la de trabajo. Actualmente $(K,L) = (1,16)$.
a) Explique cuál de las siguientes alternativas le parece más adecuada para aumentar el beneficio:
i) Aumentar la cantidad de capital en una décima.
ii) Disminuir la cantidad de trabajo en una unidad
iii) Aumentar la cantidad de capital en cinco centésimas y disminuir el trabajo en cinco décimas.
iv) Aumentar K es una décima y disminuir el trabajo un 1%.
b) Calcule la función lineal $g(K,L)$ que mejor aproxima a la función $B(K,L)$ para valores (K,L) cercanos a $(1,16)$. Use esta función para hallar cuál es aproximadamente el beneficio si K aumenta en media unidad y L se incrementa un 10%.

4. La función de utilidad de un consumidor es $U(x,y) = x + \ln y$ donde x e y representan los niveles de consumo de dos bienes X e Y respectivamente. Actualmente $(x,y) = (0,1)$.
a) Calcule la curva de nivel que contiene a la cesta $(0,1)$. Represente gráficamente el conjunto de todas las combinaciones de bienes preferidos o indiferentes a la cesta $(0,1)$.
b) Calcule la recta tangente a la curva de nivel anterior en el punto $(0,1)$.
c) Calcule el incremento aproximado de $U(x,y)$ si x aumenta en una décima. Justifique que, en un punto cualquiera (x,y) con $y > 1$, el consumidor siempre prefiere aumentar x a aumentar y.
d) El consumidor desea cambiar los niveles de consumo sin modificar "prácticamente" su utilidad. ¿Cómo debería alterar los niveles de consumo x e y?
e) Justifique la siguiente relación: $U(x,y) \simeq x + y - 1$, para todo punto (x,y) cercano al punto $(0,1)$.

5. En el siguiente gráfico aparecen las curvas de nivel de valor 2 y 4 de cierta función $f(x,y)$ con derivadas parciales primeras continuas.



a) Dibuje en el punto A la dirección de variación nula para f partiendo del punto A. Dibuja en el punto B la dirección de máximo aumento para f partiendo del punto B.
b) ¿Qué signo tienen las derivadas parciales de f en el punto B? Si estando en el punto B se pudiera elegir entre aumentar x en una décima o aumentar y en una décima ¿cuál de las dos opciones aumentaría más el valor de la función?